**МИНОБРНАУКИ РОССИИ**

**Санкт-Петербургский государственный**

**электротехнический университет**

**«ЛЭТИ» им. В.И. Ульянова (Ленина)**

**Кафедра МО ЭВМ**

отчет

**по лабораторной работе №1**

**по дисциплине «Методы оптимизации»**

Тема: Методы безусловной минимизации функций

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Студент гр. 0303 |  |  |
| Преподаватель |  | Мальцева Н. В. |

Санкт-Петербург

2023

## Цели работы.

1. Решение задачи безусловной минимизации функций с помощью стандартной программы.
2. Исследование и объяснение полученных результатов.

**Постановка задачи.**

1. Минимизировать функцию с точностью до () методом Давидона-Флетчера-Пауэлла, методом Бройдена-Флетчера-Шанно и комбинированным методом наискорейшего спуска и Ньютона.
2. Оценить скорость и порядок сходимости методов.
3. Провести сравнительный анализ эффективности методов в зависимости от начальной точки и параметра а>0.
4. Сравнить эффективность квазиньютоновых методов и комбинированного метода наискорейшего спуска и Ньютона.

\*) Часть решения, которая отвечает на одну из задач из постановки выглядит следующим образом ***[\*]***. Например, ***[1]*** в решении будет стоять там, где описана сама минимизация функции различными методами.

**Основные теоретические положения.**

В лабораторной рассматривается задача безусловной минимизации функции , т.е.: , где ϕ – целевая функция; *X* – допустимое множество ().

В качестве решения данной задачи предлагаются следующие методы, эффективность которых необходимо проанализировать:

1. Метод Давидона-Флетчера-Пауэлла, который является одним из квазиньютоновых методов (методы аппроксимации метода Ньютона, для которых должно быть выполнено условие:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (\*) |

где – матрица ) и заключается в итеративном вычислении по следующей формуле:

где

Следующая точка приближения к минимуму вычисляется при этом стандартно для квазиньютоновых методов:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (1) |

причем длина шага *αk* в квазиньютоновых методах выбирается так же, как в методе наискорейшего спуска:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (2) |

1. Метод Бройдена-Флетчера-Шанно также является одним из квазиньютоновых методов, что означает, что для него должно выполняться условие (\*), следующий шаг высчитывается по формуле (1), где считается, как (2). Рассмотрим, как в данном методе итеративно вычисляется :

\*) Оба квазиньютоновых метода обладают следующими свойствами:

* Более глобальная сходимость, чем в методе Ньютона;
* Сверхлинейная скорость сходимости.
* Для квадратичных функций сходятся за n-шагов

1. Комбинация методов наискорейшего спуска и Ньютона – это применение данных методов таким образом, чтобы сочетать в себе достоинства обоих методов. Т.е. на расстояниях далеких от точки минимума необходимо использовать метод наискорейшего спуска для обеспечения глобальной сходимости, а рядом с точкой минимума – метод Ньютона для быстрой сходимости.

Метод наискорейшего спуска заключается в минимизации функции в направлении антиградиента, т. е. жадной минимизации на каждом шаге:

где вычисляется как:

Наискорейший спуск обладает глобальной сходимостью, порядком сходимости = 1 и линейной скоростью сходимости.

Метод Ньютона заключается в повороте направления по антиградиенту ближе к минимуму с использованием второй производной:

Обладает порядком сходимости 2 и квадратичной скоростью сходимости.

Данные методы будут сравниваться с помощью оценки их практической скорости сходимости и порядка сходимости по следующим формулам:

1. Порядок сходимости:

, где

1. Скорость сходимости:

* Последовательность *ϕ*(*xk*) сходится к *ϕ*(*x\**) *линейно* (с линейной скоростью, со скоростью геометрической прогрессии), если существуют такие константы *q*∈(0,1) и *k*0, что

, при *k*≥ *k*0.

Или:

, при *k* ≥ *k*0

* Последовательность *ϕ*(*xk*) сходится к *ϕ*(*x\**) *сверхлинейно*, если

, при *k*→ ∞.

Или:

, при *k*→ ∞

* Последовательность *ϕ*(*xk*) сходится к *ϕ*(*x\**) с *квадратичной скоростью*, если существуют такие константы *c*≥ 0 и *k*0, что

, при *k* ≥ *k*0.

Или:

, при *k* ≥ *k*0

**Решение.**

Исходя из структуры заданной для минимизации функции:

,

Можно сказать, что это приблизительно параболоид с единственным минимумом в точке (1, 1), причем вне зависимости от параметра a:

В качестве тестовых параметров запуска методов минимизации будем использовать следующие параметры:

* Начальный шаг не нужен ни для одного метода, поэтому здесь можно задать произвольное значение.

Выбраны такие значения параметров из тех соображений, чтобы проверить работу метода на узких и широких параболоидах (проверка устойчивости к овражности ) с начальной точкой на сравнительно близком, среднем и очень далеком расстоянии от минимума (проверка области сходимости метода).

***[1]*** Результаты поиска минимума с заданными параметрами в программе (см. таблицу 1):

Таблица 1 – Количество шагов для нахождения минимума

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Параметр | Начальное приближение | Количество шагов для нахождения минимума |
| Метод Давидона-Флетчера-Пауэлла | | |
| 0.001 | (2, 3) | 160 |
| 0.1 | (2, 3) | 10 |
| 2 | (2, 3) | 5 |
| 300 | (2, 3) | 4 |

Продолжение таблицы 1

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| 0.001 | (13, 9) | 362 |
| 0.1 | (13, 9) | 17 |
| 2 | (13, 9) | 9 |
| 300 | (13, 9) | 5 |
| 0.001 | (101, 40) | 59428 |
| 0.1 | (101, 40) | 938 |
| 2 | (101, 40) | 62 |
| 300 | (101, 40) | 16 |
| Метод Бройдена-Флетчера-Шанно | | |
| 0.001 | (2, 3) | 128 |
| 0.1 | (2, 3) | 10 |
| 2 | (2, 3) | 5 |
| 300 | (2, 3) | 4 |
| 0.001 | (13, 9) | 306 |
| 0.1 | (13, 9) | 17 |
| 2 | (13, 9) | 9 |
| 300 | (13, 9) | 5 |
| 0.001 | (101, 40) | 69026 |
| 0.1 | (101, 40) | 1145 |
| 2 | (101, 40) | 62 |
| 300 | (101, 40) | 16 |
| Комбинированный метод наискорейшего спуска и Ньютона (\*\*) | | |
| 0.001 | (2, 3) | 117 |
| 0.1 | (2, 3) | 21 |
| 2 | (2, 3) | 6 |
| 300 | (2, 3) | 2 |
| 0.001 | (13, 9) | 4512 |
| 0.1 | (13, 9) | 122 |
| 2 | (13, 9) | 29 |
| 300 | (13, 9) | 10 |
| 0.001 | (101, 40) | 480085 |
| 0.1 | (101, 40) | 10577 |

Продолжение таблицы 1

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| 2 | (101, 40) | 1919 |
| 300 | (101, 40) | 91 |

(\*\*) Применялся метод наискорейшего спуска пока и .

***[3]*** Исходя из полученных данных можно заметить, что все 3 метода ведут себя приблизительно одинаково при изменении параметров и :

* Чем больше , тем быстрее сходится каждый метод, причем самые худшие результаты были достигнуты при чрезвычайно маленьком значении (при котором наблюдалось явление, что при функция практически неограниченно вытягивается в одну сторону, - очень высокая овражность). При = 300 график тоже вытягивается и овражность растет, но не так сильно, как при = 0.001. Из полученных результатов можно сделать вывод, что все 3 метода хорошо справляются со средней овражностью (количество шагов не так велико везде, кроме = 0.001), но не высокой.
* Чем дальше начальное приближение от точки минимума, тем дольше сходятся методы. Что логично, так как все 3 метода имеют более глобальную сходимость, чем стандартный метод Ньютона, но чем дальше от минимума изначально начинает метод, тем большее расстояние до минимума необходимо пройти. Это доказывает экспоненциальный рост числа итераций в зависимости от расстояния и при этом отсутствие расходящихся методов.

***[2]*** Теперь оценим порядок и скорость сходимости каждого метода на выбранных 2-х комбинациях параметров. Для этого понадобятся дополнительные 3 вычисленных столбца (где )*, ,* . Первый столбец необходим для определения порядка сходимости (к чему он стремится в практических расчетах), второй и третий для определения линейной и квадратичной скорости сходимости, так как:

Рассмотрим линейную скорость сходимости (для её определения нужен второй доп. столбец):

Тогда:

Т.е. при линейной сходимости частное от разности значений функций на трех смежных шагах должно стремится к конкретному числу. (Соответственно при сверхлинейной должен появиться ряд с уменьшающимися значениями).

Рассмотрим теперь квадратичную скорость сходимости, по тому же принципу получаем (третий доп. столбец):

То:

Получаем, что при квадратичной скорости сходимости значения третьего столбца должны стремится к 2.

* Для начала рассмотрим метод Давидона-Флетчера-Пауэлла при параметрах = 2, и = 0.001, (см. таблицы 2 и 3):

Таблица 2 – Все шаги метода Давидона-Флетчера-Пауэлла при параметрах = 2,

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| № шага |  |  |  | Кол-во вычислений F |  |  |  |
| 1 | 1.639648 | 3.060059 | 0.9563954257 | 12 | -1.39 | - | - |
| 2 | 1.224315 | 1.260772 | 0.1573615800 | 22 | 1.11 | 0.16 | 9.06 |
| 3 | 1.099074 | 1.289681 | 0.0263090094 | 12 | 4.00 | 0.20 | 1.80 |
| 4 | 1.008431 | 1.002314 | 0.0003558781 | 22 | 1.13 | 0.01 | 2.18 |

Продолжение таблицы 2

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 5 | 1.001566 | 1.004479 | 0.0000067130 | 11 | - | - | - |

Здесь значения первого дополнительного столбца ощутимо колеблются, что говорит о сверхлинейном порядке сходимости. Скорость сходимости относительно частных разниц значений функций (второй дополнительный столбец) является сверхлинейной, так как составляет убывающий ряд. А исходя из третьего дополнительного столбца можно увидеть, что скорость сходимости даже близка к квадратичной.

Таблица 3 – 15 шагов методом Давидона-Флетчера-Пауэлла при параметрах = 0.001,

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| № шага |  |  |  | Кол-во вычислений F |  |  |  |
| 59414 | 0.858935 | 0.737681 | 0.0000199071 | 43 | 1.00 | - | - |
| 59415 | 0.858928 | 0.737743 | 0.0000199016 | 15 | 1.04 | 364.62 | 0.69 |
| 59416 | 0.866239 | 0.750305 | 0.0000178962 | 43 | 1.00 | 0.01 | 1.34 |
| 59417 | 0.866344 | 0.750642 | 0.0000178720 | 21 | 1.04 | 73.98 | 0.75 |
| 59418 | 0.873192 | 0.762502 | 0.0000160818 | 43 | 1.00 | 0.01 | 1.39 |
| 59419 | 0.873245 | 0.762492 | 0.0000160711 | 15 | 1.04 | 147.41 | 0.73 |
| 59420 | 0.879652 | 0.773687 | 0.0000144938 | 43 | 1.00 | 0.00 | 1.44 |
| 59421 | 0.879633 | 0.773720 | 0.0000144893 | 15 | 1.04 | 313.13 | 0.70 |
| 59422 | 0.885652 | 0.784311 | 0.0000130802 | 43 | 1.00 | 0.00 | 1.45 |
| 59423 | 0.885647 | 0.784361 | 0.0000130767 | 16 | 1.03 | 360.26 | 0.70 |
| 59424 | 0.891307 | 0.794387 | 0.0000118158 | 43 | 1.00 | 0.01 | 1.32 |
| 59425 | 0.891499 | 0.794604 | 0.0000118001 | 22 | 1.03 | 71.34 | 0.76 |
| 59426 | 0.896820 | 0.804102 | 0.0000106801 | 43 | 1.00 | 0.02 | 1.29 |
| 59427 | 0.896765 | 0.804147 | 0.0000106591 | 13 | 1.03 | 47.99 | 0.78 |
| 59428 | 0.901777 | 0.813141 | 0.0000096514 | 43 | - | - | - |

Для данного запуска метода Давидона-Флетчера-Пауэлла виден линейный порядок сходимости с (в среднем) линейной скоростью сходимости (первый дополнительный столбец содержит приблизительно 1, а во втором дополнительном столбце значения колеблются относительно одного конкретного). Интересен факт, что в данном методе каждый второй шаг имеет выделяющуюся скорость сходимости относительно других.

Итого метод имеет порядок сходимости от квадратичного до линейного (в среднем сверхлинейный), так же и со скоростью сходимости, что совпадает с теорией.

* Теперь рассмотрим метод Бройдена-Флетчера-Шанно при параметрах = 300, и = 0.1, (см. таблицы 4 и 5):

Таблица 4 – Все шаги методом Бройдена-Флетчера-Шанно при параметрах = 300,

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| № шага |  |  |  | Кол-во вычислений F |  |  |  |
| 1 | 1.016578 | 3.003235 | 3.9625774436 | 8 | -7.08 | - | - |
| 2 | 0.995426 | 1.005716 | 0.0064959397 | 17 | 1.05 | 0.0016 | -3.67 |
| 3 | 1.000088 | 1.005666 | 0.0000324530 | 9 | 1.95 | 0.0050 | 2.05 |
| 4 | 1.000024 | 0.999966 | 0.0000001859 | 18 | - | - | - |

Исходя из полученных данных на рассматриваемом запуске, метод имеет квадратичную скорость и порядок сходимости (по третьему и первому дополнительным столбцам соответственно, так как и там, и там значения близки к 2).

Таблица 5 – 15 шагов методом Бройдена-Флетчера-Шанно при параметрах = 0.1,

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| № шага |  |  |  | Кол-во вычислений F |  |  |  |
| 3 | 2.938342 | 8.666687 | 0.3767950222 | 10 | 0.81 | - | - |
| 4 | 2.500963 | 6.087228 | 0.2533755225 | 28 | 1.00 | 0.3127 | 1.56 |
| 5 | 2.462697 | 6.093716 | 0.2147799876 | 10 | 0.75 | 1.9397 | 0.80 |
| 6 | 2.102884 | 4.286918 | 0.1399149565 | 27 | 1.00 | 0.3421 | 1.41 |
| 7 | 2.066302 | 4.294203 | 0.1143051254 | 11 | 0.59 | 1.8627 | 0.83 |
| 8 | 1.747386 | 2.949705 | 0.0666022175 | 27 | 1.00 | 0.3193 | 1.38 |
| 9 | 1.714100 | 2.957600 | 0.0513726195 | 11 | 0.15 | 1.7055 | 0.87 |
| 10 | 1.447971 | 2.023612 | 0.0253979148 | 28 | 0.97 | 0.2899 | 1.34 |
| 11 | 1.420546 | 2.031426 | 0.0178674794 | 11 | -6.67 | 1.4864 | 0.92 |
| 12 | 1.216795 | 1.436160 | 0.0066740651 | 29 | 1.01 | 0.2411 | 1.32 |

Продолжение таблицы 5

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 13 | 1.198058 | 1.442573 | 0.0039749728 | 12 | 2.80 | 1.1751 | 0.97 |
| 14 | 1.065074 | 1.114894 | 0.0008032965 | 28 | 1.00 | 0.1511 | 1.33 |
| 15 | 1.056475 | 1.118384 | 0.0003239800 | 13 | 2.33 | 0.6477 | 1.06 |
| 16 | 1.005223 | 1.007191 | 0.0000135052 | 28 | 1.00 | 0.0387 | 1.40 |
| 17 | 1.003831 | 1.007833 | 0.0000014922 | 14 | - | - | - |

Этот запуск метода Бройдена-Флетчера-Шанно имеет порядок сходимости, который сначала линейный, а ближе к концу приближается к квадратичному (первый дополнительный столбец), при этом скорость сходимости сверхлинейная (второй столбец – убывающий ряд).

Получаем, что метод Бройдена-Флетчера-Шанно так же, как и Давидона-Флетчера-Пауэлла, имеет в среднем сверхлинейную скорость сходимости, что совпадает с теоретическими значениями.

* Наконец рассмотрим комбинированный метод наискорейшего спуска и Ньютона (работающий на заданной эвристике (\*\*)) при параметрах = 0.1, и = 300 , (см. таблицы 6 и 7):

Таблица 6 – 15 шагов комбинированным методом наискорейшего спуска и Ньютона при параметрах = 0.1,

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| № шага |  |  |  | Кол-во вычислений F |  |  |  |
| 7 | 1.491088 | 1.929926 | 0.1102113552 | 1 | -4.69 | 2.2113 | 0.78 |
| 8 | 1.419588 | 1.669086 | 0.1374223850 | 1 | 1.42 | 0.0264 | 2.29 |
| 9 | 1.366630 | 1.615070 | 0.0772519460 | 1 | 1.86 | 18.7866 | 0.54 |
| 10 | 1.306051 | 1.442193 | 0.0788395215 | 1 | 1.27 | 0.2279 | 1.42 |
| 11 | 1.257251 | 1.374776 | 0.0490143020 | 1 | 1.39 | 2.2134 | 0.84 |
| 12 | 1.206988 | 1.262059 | 0.0422161293 | 1 | 1.23 | 0.4792 | 1.18 |
| 13 | 1.164704 | 1.200151 | 0.0271690511 | 1 | 1.27 | 1.0679 | 0.99 |
| 14 | 1.124802 | 1.129531 | 0.0199581670 | 1 | 1.22 | 0.6286 | 1.10 |
| 15 | 1.091190 | 1.083802 | 0.0122576510 | 1 | 1.23 | 0.7518 | 1.05 |
| 16 | 1.062129 | 1.044267 | 0.0074168164 | 1 | 1.22 | 0.6020 | 1.09 |
| 17 | 1.038920 | 1.019138 | 0.0037775962 | 1 | 1.22 | 0.5177 | 1.11 |
| 18 | 1.021264 | 1.003715 | 0.0015869465 | 1 | 1.21 | 0.3450 | 1.16 |

Продолжение таблицы 6

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 19 | 1.009353 | 0.997721 | 0.0004528250 | 1 | 1.21 | 0.1530 | 1.24 |
| 20 | 1.002773 | 0.997759 | 0.0000615344 | 1 | 1.30 | 2.2113 | 0.78 |
| 21 | 1.000374 | 0.999458 | 0.0000016778 | 1 | - | - | - |

Из полученных данных получается сверхлинейный порядок сходимости (первый столбец значения больше 1 и меньше 2) и сверхлинейная скорость сходимости (второй дополнительный столбец содержит приближенно убывающий ряд).

Таблица 7 – Все шаги комбинированным методом наискорейшего спуска и Ньютона при параметрах = 300,

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| № шага |  |  |  | Кол-во  вычислений F |  |  |  |
| 1 | 0.950194 | 9.248450 | 70.3928918830 | 7 | 1.00 | - | - |
| 2 | 1.064451 | 9.217492 | 66.6042879950 | 8 | 0.97 | 0.9948 | 1.00 |
| 3 | 0.949992 | 8.781886 | 62.8352157360 | 11 | 1.00 | 0.9413 | 0.95 |
| 4 | 1.061175 | 8.752658 | 59.2872227900 | 8 | 0.98 | 0.8268 | 0.85 |
| 5 | 0.960079 | 8.396759 | 56.3538344350 | 11 | 1.00 | 0.9504 | 0.95 |
| 6 | 1.057747 | 8.369031 | 53.5658394110 | 8 | 0.97 | 1.0075 | 1.01 |
| 7 | 0.959069 | 8.008835 | 50.7568108060 | 10 | 1.00 | 0.9465 | 0.95 |
| 8 | 1.055058 | 7.982538 | 48.0979497930 | 8 | -2.39 | 18.0888 | 3.96 |
| 9 | 0.997358 | 1.009259 | 0.0023060919 | 1 | 2.59 | 0.0000 | -1.57 |
| 10 | 1.000000 | 1.000006 | 0.0000000001 | 1 | - | - | - |

На данном запуске видно, как работает эвристика, заданная на комбинированном методе наискорейшего спуска и Ньютона, так как до 9 шага порядок и скорость сходимости были линейные (первый доп. столбец – значения приблизительно = 1, второй – приблизительно одинаковые значения). Но 9 и 10 шаг сделаны с квадратичным порядком сходимости (на что указывает первый доп. столбец) и квадратичной скоростью сходимости (так как в третьем дополнительном столбце последние значения в среднем равны 2). Получаем в среднем сверхлинейные порядок и скорость сходимости.

Комбинированный метод наискорейшего спуска и Ньютона (с заданной эвристикой) обладает сверхлинейными порядком и скоростью сходимости, хотя из-за не слишком хорошей эвристики он большую часть итераций деградирует до линейных порядка и скорости сходимости, что хорошо видно в таблице 7. Эти данные подтверждают теорию, так как эвристика предполагает использование метода наискорейшего спуска на большей части вычисления минимума, если запуск метода произведен из дальней точки, а сверхлинейная (в общем) сходимость следует из сходимостей метода Ньютона и наискорейшего спуска по отдельности.

***[4]*** Сравнение эффективности квазиньютоновых методов и комбинированного метода наискорейшего спуска и Ньютона:

Исходя из количества шагов, необходимых для нахождения минимума методов при разных значениях параметров можно заметить, что на одинаковых данных оба квазиньютоновых метода сходятся практически за одинаковое число шагов, что указывает на их одинаковую эффективность.

В то же время комбинированный метод наискорейшего спуска и Ньютона (с заданной эвристикой) показал себя хуже квазиньютоновых методов практически на всех тестовых данных. Это указывает на плохой подбор эвристики, которая при этом справляется с главным недостатком метода Ньютона – локальной сходимостью.

Таблица 8 - Cводная таблица результатов

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | Метод Давидона-Флетчера-Пауэлла | Метод Бройдена-Флетчера-Шанно | Комбинированный метод наискорейшего спуска и Ньютона |
| Порядок сходимости | Сверхлинейный () | Сверхлинейный () | Сверхлинейный (1,46) |
| Скорость сходимости | **Cверхлинейная** | **Cверхлинейная** | Cверхлинейная (при большом отдалении от точки минимума деградирует до линейной) |

Продолжение таблицы 8

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Максимальное достигнутое число шагов | **59428** | 69026 | 480085 |
| Минимальное число шагов | 4 | 4 | **2** |

**Вывод.**

В ходе лабораторной работы были изучены 2 квазиньютоновых метода и комбинированный метод наискорейшего спуска и Ньютона. В результате оценки эффективности удалось установить, что квазиньютоновые методы в среднем лучше комбинированного метода наискорейшего спуска и Ньютона, исходя из числа шагов для нахождения минимума и относительной сложности вычислений. Так же были подтверждены теоретические порядок и скорость сходимости для каждого метода.